2024학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
고난도 문항 해설 및 유사유형문제

1) 2024학년도 9월 모평 22번 - [정적분과 부정적분]

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_{1}^{3} g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

[문항해설]

> 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는지 묻는 문제다. (나) 조건을 보고 바로 곱의 미분법을 떠올릴 수 없었다면 관련 정의를 꼼꼼하게 정리해 놓도록 한다. 적분구간에 미지수가 포함된 함수도 시험에 자주 등장하는 유형이므로 관련 개념을 확실하게 이해하고 동일 유형의 다양한 문제들을 평소 훈련하도록 한다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

함수 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & (x<1)\\ 2(x-3) & (x \geq 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_0^x (t-1)f(x)dt$라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자. $\left|\lim_{k\to a+} h(t)-\lim_{t\to a-} h(t)\right|=2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2020년 10월 학력평가 수학 B형 33번

[유사유형 풀어보기] _ 02

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.

(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2022년 3월 학력평가 수학 22번

[유사유형 풀어보기] _ 03

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases}f(x+2) & (x<0)\\ \int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0)\end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=|g(x)-g(a)|$라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

§ 출전 : 고3 2021년 7월 학력평가 수학 A형 19번

1) [정답] 80

[출제의도] 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x)=\int_{0}^{x}(t-1)f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\geq 1)\end{cases}$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

(C_1, C_2 는 적분상수)

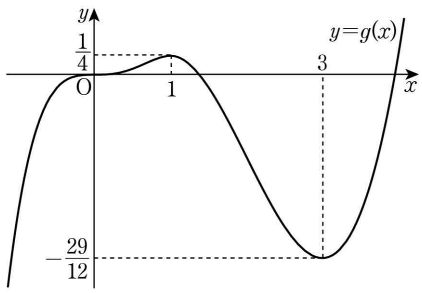
$g'(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$g(0)=0$ 에서 $C_1=0$ 이고 $-\frac{3}{4}+1=\frac{2}{3}-4+6+C_2$

에서 $C_2=-\frac{29}{12}$

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12} & (x\geq 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구하면

$$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\frac{29}{12}\text{ 또는 } t>\frac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\frac{29}{12}\text{ 또는 } t=\frac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\frac{29}{12}<t<\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $\frac{1}{4}$ 과 $-\frac{29}{12}$ 뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

[참고] $g(x)=\int_{0}^{x}(t-1)f(t)\,dt$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x<1$ 일 때,

$$g(x)=\int_{0}^{x}(t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$$

(ii) $x\geq 1$ 일 때,

$g(x)$

$$=\int_{0}^{1}(t-1)(-3t^2)dt+\int_{1}^{x}2(t-1)(t-3)dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}$$

2) [정답] 4

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다. …… ㉠

조건 (가)의 에 $x=2a$를 대입하면 $2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분

가능하고, $\frac{d}{dx}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a+}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a+}x^2|x-b|$$
$$=4a^2|2a-b|$$
$$\lim_{x\to 2a-}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a-}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a-}\left(-x^2|x-b|\right)$$
$$=-4a^2|2a-b|$$

이므로 $4a^2|2a-b|=-4a^2|2a-b|$에서 $b=2a$이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)^2$

$$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt=\begin{cases}-x^2(x-a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-a)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

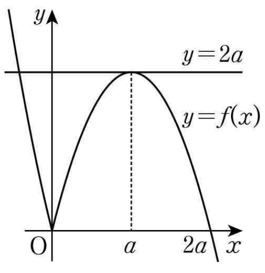
이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$(a-x)f(x)=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$$

방정식 $g(f(x))=0$에서 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 0, $2a$를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$f(a)=-4a(a-2a)$

$=4a^2=2a$

$a=\frac{1}{2}$

$\int_{-2a}^{2a} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(4x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{1}(-4x^2+4x)\,dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{1}$

$=4$

3) [정답] ①

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0-} g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

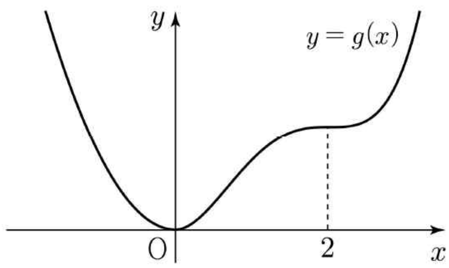
$g(x)\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \int_0^x t(t-2)^2dt & (x\geq 0)\end{cases}$

$g'(x)\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

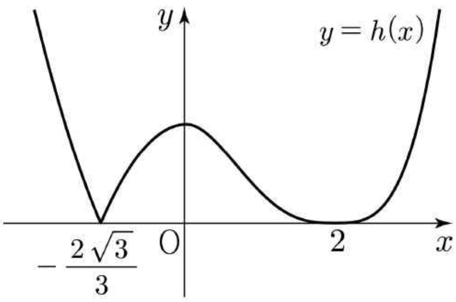
방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\neq\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$

$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.
함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2
(iii) $g(a)=g(2)$인 경우
방정식 $h(x)=0$의 두 근을
$\gamma(\gamma<0)$, 2라 하면
$$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$
함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.
$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로
$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$$
함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
함수 $h(x)$는 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1
$$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$$
$$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3},\ \gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지
않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는
모든 a의 값의 곱은 $2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고]
함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



2) 2024학년도 9월 모평 29번 - [등비수열의 극한]

29. 두 실수 a, b $(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

[문항해설]

> 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는지 묻고 있다. 엄격하게 조건을 구분하여 문제를 푸는 연습을 한 학생들에게 유리한 문제다. 분모의 가장 큰 거듭제곱으로 분자 분모를 나눔으로써 문제에 접근할 수 있다. 이미 알고 있는 지수의 밑과 구해야 할 미지수의 크기를 구분해 각 경우에 모순되는 부분은 없는지 살펴본다. 모순되는 부분이 없이 모두 참인 a, b의 값을 찾는 문항이다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2 \le |x| < 2k$일 때,
>
> $$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2023년 3월 학력평가 수학 30번

[유사유형 풀어보기] _ 02

> 함수 $f(x)$를 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}$ (a, b는 양의 상수)라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다. $k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2020년 10월 학력평가 수학 B형 29번

[유사유형 풀어보기] _ 03

> 자연수 k에 대하여
>
> $$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}$$
>
> 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값은?

§ 출전 : 고2 2017년 6월 학력평가 수학 A형 19번

1) [정답] 25

[출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수의 그래프에 대한 문제를 해결한다.

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$ 에서

$|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=-x$

$|x|=1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}=0$

$|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=x$

그러므로

$f(x)=\begin{cases}-x & (|x|<1)\\ 0 & (|x|=1)\\ x & (|x|>1)\end{cases}$

자연수 k에 대하여

(ⅰ) $2k-2\le|x|<2k-1$일 때

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|<1$이므로

$g(x)=(2k-1)\times\left(-\frac{x}{2k-1}\right)=-x$

(ⅱ) $|x|=2k-1$일 때

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|=1$이므로

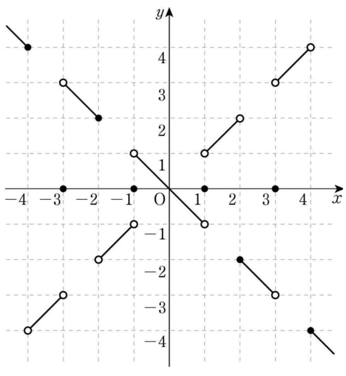
$g(x)=(2k-1)\times0=0$

(ⅲ) $2k-1<|x|<2k$일 때

$\left|\frac{x}{2k-1}\right|>1$이므로

$g(x)=(2k-1)\times\left(\frac{x}{2k-1}\right)=x$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$t=2m-1$(m은 정수)일 때 직선 $y=t$는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않는다.

따라서 $0<t<10$인 모든 t의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$

2) **정답: 13**

[출제의도] 수열의 극한을 이용하여 추론하기

$|x|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{2}{x^{2n}}}=a+\frac{b}{x}$$

$x=1$일 때, $f(1)=\dfrac{a+b+1}{3}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\dfrac{a-b-1}{3}$

$|x|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}$$

$$=\frac{0+0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

따라서

$$f(x)\begin{cases} a+\dfrac{b}{x} & (|x|>1) \\ \dfrac{a+b+1}{3} & (x=1) \\ \dfrac{a-b-1}{3} & (x=-1) \\ \dfrac{x}{2} & (|x|<1) \end{cases}$$

함수 $g(x)=2(x-1)+m$이라 하면

방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수는

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는

점의 개수와 같다.

$x<-1$에서 $f(x)$는 감소하고 $x>1$에서 $f(x)$는

감소하므로 $|x|>1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의

그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고,

$|x|<1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$인

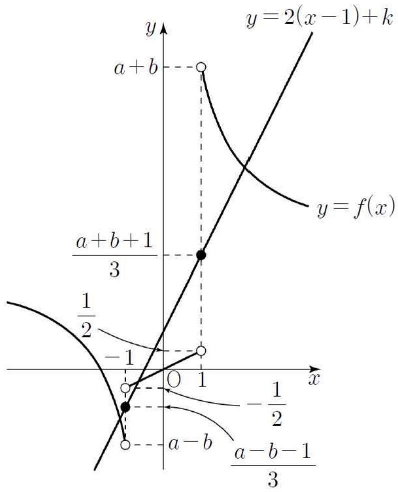
일차함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의

그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 1이다.

그러므로 $c_k=5$인 자연수 k가 존재하려면

$f(1)=g(1)$, $f(-1)=g(-1)$이어야 하고,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2(x-1)+k$는

두 점 $\left(1,\ \dfrac{a+b+1}{3}\right)$, $\left(-1,\ \dfrac{a-b-1}{3}\right)$을 지나므로

$\dfrac{a+b+1}{3}=k$, $\dfrac{a-b-1}{3}=k-4$에서

$b=5$

$k=\dfrac{a}{3}+2$가 자연수이므로 a는 3의 배수이다. ⋯ ㉠

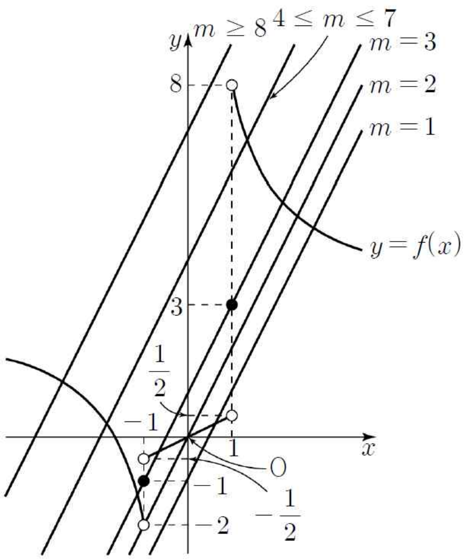
$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)<f(-1)<\lim\limits_{x\to-1+}f(x)$이어야 하므로

$a-5<\dfrac{a}{3}-2<-\dfrac{1}{2}$에서 $a<\dfrac{9}{2}$ ⋯ ㉡

$a>0$이므로 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{3}+2<a+5$가 성립하며

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)<f(1)<\lim\limits_{x\to1+}f(x)$를 만족시킨다.

㉠, ㉡에 의해 $0<a<\dfrac{9}{2}$ 이므로 $a=3$, $k=3$



(ⅰ) $m=1$일 때

$g(-1)=-3$, $g(1)=1$이므로$y=f(x)$의

그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $-1<x<1$,

$x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_1=2$

(ⅱ) $m=2$일 때

$g(-1)=-2$, $g(1)=2$이므로 $y=f(x)$의

그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$,

$x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_2=2$

(ⅲ) $m=3$일 때

$m=k=3$이므로 $c_3=5$

(ⅳ) $4\leq m\leq 7$일 때

$g(-1)>\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=-\dfrac{1}{2}$,

$g(1)<\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=8$이므로 $c_3=5$

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는

$x<-1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m=2$

(ⅴ) $m\geq 8$일 때

$g(-1) > \lim_{x\to -1+} f(x) = -\frac{1}{2}$,

$g(1) \geq \lim_{x\to 1+} f(x) = 8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는

$x<-1$에서 1개의 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m = 1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해

$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m - 1) = +3+1+1+4+1\times 4 = 13$$

3) **[정답] ④**

[출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}$$ 에서

(ⅰ) $0<\frac{k}{10}<1$일 때, 즉 $0<k<10$일 때

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1} = \frac{2\times 0+0}{0+0+1} = 0$$

이다.

(ⅱ) $\frac{k}{10}=1$일 때, 즉 $k=10$일 때

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times 1^{2n+1}+1^n}{1^{2n}+1^n+1} = \frac{3}{3} = 1$$

(ⅲ) $\frac{k}{10}>1$, 즉 $k>10$일 때

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n}+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}}} = \frac{\frac{k}{5}+0}{1+0+0} = \frac{k}{5}$$

이다.

따라서 $a_k = \begin{cases} 0 & (k<10) \\ 1 & (k=10) \\ \frac{k}{5} & (k>10) \end{cases}$ 이다.

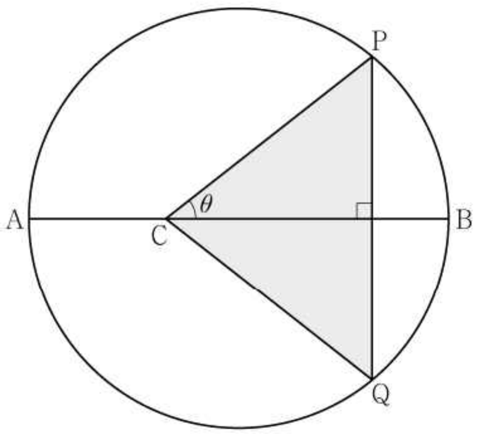
그러므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_k = \sum_{k=1}^{9}a_k + a_{10} + \sum_{k=11}^{20}a_k = \sum_{k=1}^{9}0+1+\sum_{k=11}^{20}\frac{k}{5} = 1+\sum_{k=1}^{10}\left(2+\frac{k}{5}\right) = 1+20+\frac{1}{5}\times\frac{10\times 11}{2} = 32$$

이다.

3) 2024학년도 9월 모평 30번 - [삼각함수의 미분법]

30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle\mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



[문항해설]

 > 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제다. 여러 가지 접근법이 가능하기에, 복잡한 풀이로 푼 학생도 있고 간단한 개념으로 빠르게 답을 찾은 학생들도 있을 것이다. 각 θ의 크기에 의해 선분들의 크기가 결정된다는 개념을 이용해 삼각함수를 관계식에 적극 사용한다. 선분 $\overline{CP}$의 길이와 각 θ의 관계식에서 근의 공식으로 접근할 수 있으나, 음함수의 미분법을 이용하여 해결한다면 풀이를 더욱 단축시킬 수 있다. 도형 문제는 다양한 접근과 풀이가 가능하므로 가장 간결하고 직관적인 풀이를 찾는 연습을 꾸준히 해야한다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은?

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$
④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

§ 출전 : 고3 2019년 6월 평가원 수학 A형 21번

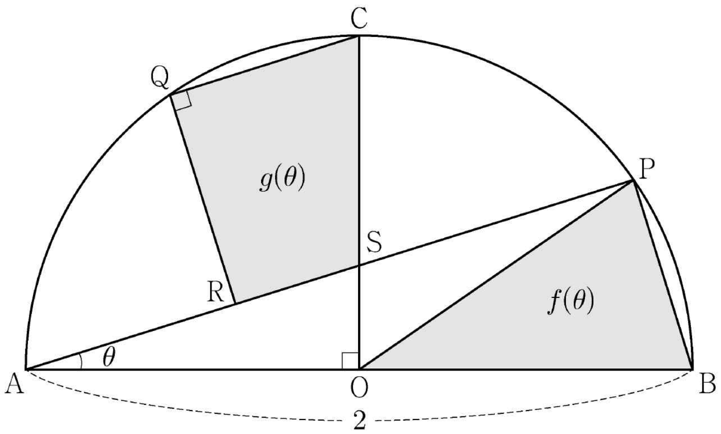
[유사유형 풀어보기] _ 02

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2019년 11월 수능 수학 A형 30번

[유사유형 풀어보기] _ 03

그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 ∠AOC$=\dfrac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{\text{PB}}=\overline{\text{QC}}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 ∠CQR$=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. ∠PAB$=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

§ 출전 : 고3 2022년 수능 수학 28번

1) **[정답] ②**

출제의도 : 곡선의 접선 및 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=t$에서

$\dfrac{1-\ln x}{x^2}=t$

이때, $g(t)=x$이므로

$g\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)=x$ …… ㉠

한편, 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l이라 하고, 접선 l과 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(x_1,\ f(x_1))$이라 하면 접선 l의 방정식은

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

즉,

$y-\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{1-\ln x_1}{(x_1)^2}(x-x_1)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{1-\ln x_1}{(x_1)^2}(0-x_1)$

$\ln x_1=\dfrac{1}{2}$

$x_1=\sqrt{e}$

따라서

$a=f'(\sqrt{e})=\dfrac{1-\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\dfrac{1}{2e}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)\times\dfrac{2\ln x-3}{x^3}=1$

이므로

$g'\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)=\dfrac{x^3}{2\ln x-3}$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=\sqrt{e}$를 대입하면

$g'\left(\dfrac{1}{2e}\right)=-\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$

즉,

$g'(a)=g'\left(\dfrac{1}{2e}\right)=-\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$

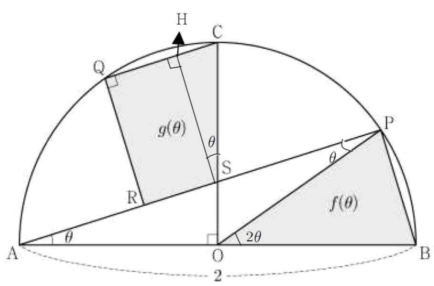
따라서

$a\times g'(a)=\dfrac{1}{2e}\times\left(-\dfrac{e\sqrt{e}}{2}\right)$

$=-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$

2) [정답] 64
출제의도 : 두 곡선이 한 점에서 만나도록 하는 관계식을 구한 후, 음함수의 미분법을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는가?
정답풀이 :
곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$이 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(\alpha>t)$라 하면
$t^3\ln(\alpha-t)=2e^{\alpha-a}$ …… ㉠
곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$이 한 점에서 만나려면 두 곡선이 만나는 점에서의 미분계수가 같아야 한다.
곡선 $y=t^3\ln(x-t)$에서
$y'=t^3\times\dfrac{1}{x-t}$
곡선 $y=2e^{x-a}$에서
$y'=2e^{x-a}$
이때,
$t^3\times\dfrac{1}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a}$ …… ㉡
㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면
$3t^2\ln(\alpha-t)+t^3\times\left(-\dfrac{1}{\alpha-t}\right)=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\dfrac{da}{dt}$
$t^3\ln(\alpha-t)\times\dfrac{3}{t}-\dfrac{t^3}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\dfrac{da}{dt}$
㉠, ㉡에 의해
$2e^{\alpha-a}\times\dfrac{3}{t}-2e^{\alpha-a}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\dfrac{da}{dt}$
$\dfrac{3}{t}-1=(-1)\times\dfrac{da}{dt}$
$\dfrac{da}{dt}=-\dfrac{3}{t}+1$
$t=\dfrac{1}{3}$일 때 $\dfrac{da}{dt}=-8$이므로
$f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-8$
따라서
$\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2=(-8)^2=64$

3) [정답] ②
출제의도 : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?
정답풀이 :



$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\theta$이므로
$\angle\mathrm{BOP}2\theta$
따라서
$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin2\theta$

또한, $\overline{\mathrm{OA}}=1$에서 $\overline{\mathrm{OS}}=\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CS}}=1-\tan\theta$

이때, $\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COQ}=2\theta$이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{SCQ}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

또한, $\angle\mathrm{CSR}=\theta+\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\angle\mathrm{QRS}=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{CSH}=\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{SH}}=\overline{\mathrm{RQ}}=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$\overline{\mathrm{CH}}=(1-\tan\theta)\sin\theta$

이고

$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{QH}}&=\overline{\mathrm{CQ}}-\overline{\mathrm{CH}}\\&=2\sin\theta-(\sin\theta-\sin\theta\tan\theta)\\&=\sin\theta+\sin\theta\tan\theta\end{aligned}$$

따라서

$g(\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{RS}})\times\overline{\mathrm{QR}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(2\sin\theta+\sin\theta+\sin\theta\tan\theta)\times(1-\tan\theta)\cos\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times(3\sin\theta+\sin\theta\tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

이므로

$3f(\theta)-2g(\theta)$

$=\dfrac{3}{2}\sin2\theta-(3\sin\theta+\sin\theta\tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

$=3\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)$

$=\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)$

따라서

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)}{\theta^2}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\cos\theta\times(\tan\theta+2)\right\}$

$=1\times1\times1\times2=2$